ACADÉMIE DES SCIENCES.

SÉANCE DU LUNDI 29 AOUT 1932.

PRÉSIDENCE DE M. ÉMILE ROUX.

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS

DES MEMBRES ET DES CORRESPONDANTS DE L'ACADÉMIE.

M. le **Secrétaire perpétuel** annonce à l'Académie que la prochaine séance publique annuelle aura lieu le 12 décembre.

HYDRAULIQUE. — *La similitude des ouvrages courts : expériences sur la grande forme de radoub du port du Havre.* Note [1] de MM. **C. Camichel**, **F. Beau** et **L. Escande**.

Nous avons déjà effectué diverses études [2] concernant la similitude des ouvrages courts, c'est-à-dire des systèmes hydrauliques dans lesquels les pertes de charge sont proportionnelles au carré de la vitesse, dès que le nombre de Reynolds dépasse une certaine valeur, caractéristique de l'ouvrage étudié. La fonction φ entrant dans l'expression générale des pertes de charge $\Delta p = \rho V^2 \varphi(VD/\nu)$ est alors constante, et la similitude hydrodynamique existe entre divers modèles géométriquement semblables, sans qu'il soit nécessaire de réaliser l'égalité des nombres de Reynolds caractéristiques des mouvements que l'on compare.

En particulier, dans les expériences effectuées sur le collecteur de l'usine de Miègebat, de la Compagnie du Midi, nous avons pu étudier des conduites industrielles pour des nombres de Reynolds atteignant 3000000,

---

(1) Séance du 8 août 1932.

(2) *Comptes rendus*, **178**, 1924, p. 752; **182**, 1926, p. 881; **191**, 1930, p. 750; **192**, 1931, p. 825.

mais l'influence notable de la rugosité et des irrégularités de construction des parois, dont il est impossible de réaliser la similitude géométrique, avait introduit de nettes divergences entre les résultats obtenus sur l'ouvrage et ceux que l'on avait déduits des mesures faites sur les modèles réduits.

Dans ces conditions, il était nécessaire de rechercher une meilleure confirmation expérimentale des lois de similitude des ouvrages courts. C'est ce que nous a permis de réaliser l'étude du remplissage de la forme de radoub du port du Havre, l'une des plus grandes existant dans le monde, sur l'ouvrage lui-même, et sur un modèle réduit à l'échelle 1/25; cette étude réunit un certain nombre de conditions qui sont, en effet, particulièrement intéressantes et favorables :

1° Les vitesses atteintes par l'eau et les dimensions des aqueducs correspondent à la mise en jeu de nombres de Reynolds très élevés, allant jusqu'à 7000000; la fonction φ n'a jamais été étudiée, à notre connaissance, pour des nombres de Reynolds aussi considérables.

2° L'ouvrage, lui-même, constitue un bassin de jaugeage de très grandes dimensions (longueur 313^{m}, largeur 38^{m}, hauteur d'eau 16^{m}) qui se remplit lentement et dont les sections horizontales, parfaitement connues, permettent de déduire la mesure du débit de la loi de variation du niveau en fonction du temps; c'est là un grand avantage, en raison de la difficulté que présente la mesure très précise de gros débits (atteignant 100 m^{3}/sec).

3° Les parois des aqueducs de remplissage sont très régulières, comme nous avons pu le constater, en les visitant à sec, et leur rugosité relative est très faible; on obtient, de ce fait, une similitude des particularités des parois incontestablement supérieure à celle qui se trouve réalisée dans les conduites d'usine. De plus, en raison des singularités de l'écoulement de l'eau à l'intérieur des aqueducs : changements de section, contractions, coudes, etc., la turbulence du mouvement est particulièrement grande et introduit une perte d'énergie due au choc des particules liquides les unes contre les autres, vis-à-vis de laquelle l'influence de la rugosité des parois devient négligeable; on se trouve donc dans les meilleures conditions au point de vue de la réalisation de la similitude des écoulements, à l'intérieur de l'ouvrage et du modèle.

Ces diverses circonstances expliquent le grand intérêt de recherches précises sur la similitude de ces ouvrages. Déjà à l'étranger, certaines expériences fort intéressantes avaient été effectuées sur les écluses d'Ymuiden, de Steenenhoef, de Skanstull et du canal Trolhätte, mais dans

des conditions moins favorables : dans certaines d'entre elles, la marée ne permettait pas la permanence du niveau amont, nécessaire pendant le remplissage, dans d'autres, la similitude géométrique entre le modèle réduit et l'ouvrage réel n'était qu'imparfaitement réalisée. En fait, les résultats les plus nets qui ont été obtenus correspondent à des écluses de dimensions petites, vis-à-vis de celles de la forme de radoub du Havre.

Nos expériences ont été effectuées au moment où la marée était étale; le niveau de la mer demeurait pratiquement immuable pendant toute la durée du remplissage, soit près d'une heure. On observait le niveau, dans la forme de radoub, en 6 points diffé-

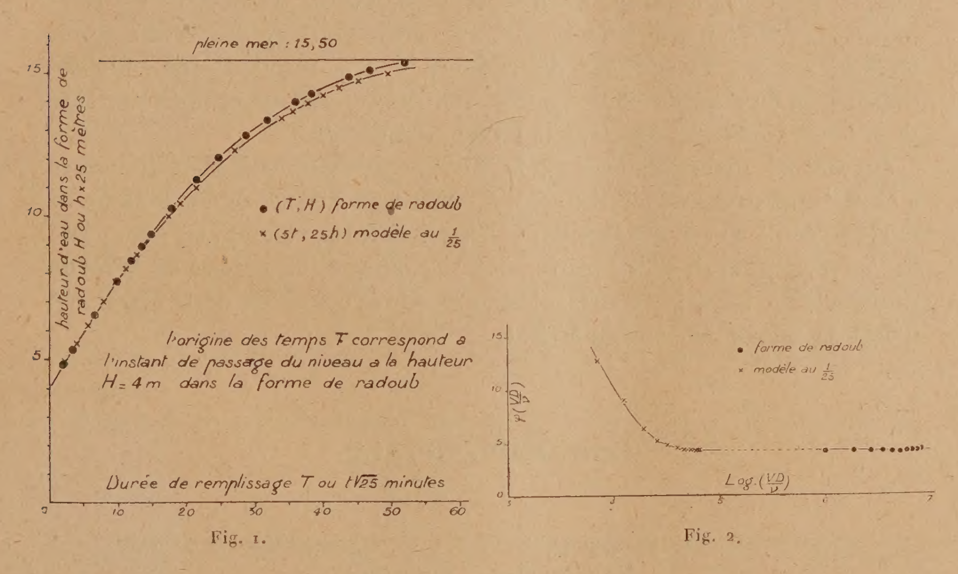


Fig. 1.

Fig. 2.

rents; la mesure du temps se faisait au moyen de chronomètres à aiguilles dédoublantes rattrapantes; les déterminations étaient effectuées à diverses reprises, en utilisant d'une part le remplissage total de l'écluse primitivement vide, d'autre part les remplissages partiels qu'on pouvait réaliser par le jeu des marées, sans avoir recours à des épuisements coûteux; la coïncidence des résultats obtenus dans les expériences successives montrait que les erreurs pouvant provenir des différences d'imbibition des parois étaient négligeables. Le remplissage étant assez lent, le niveau dans la forme de radoub demeurait sensiblement horizontal, comme le montre l'absence de décalage entre les observations faites aux six postes. On effectuait, sur le petit modèle, alimenté en eau douce, des expériences homologues.

Les résultats obtenus sont présentés sur la figure 1 qui reproduit la courbe de la profondeur d'eau H, en fonction du temps T, dans l'ouvrage,

et des quantités homologues h et t du modèle, après multiplication de h par 25 et de t par la racine carrée du rapport de similitude, soit 5. On voit sur cette courbe que la loi de similitude des ouvrages courts se vérifie très bien pour des nombres de Reynolds supérieurs à 60000. Pour des nombres de Reynolds moindres, correspondant à la fin du remplissage, les débits sont, dans le modèle réduit, légèrement inférieurs à la valeur qu'ils devraient avoir d'après cette loi. Ce résultat s'explique facilement : la fonction φ, déduite des expériences sur la forme de radoub et son modèle réduit ([1]), est constante (*fig.* 2) quand le nombre de Reynolds dépasse 60000; pour des nombres de Reynolds décroissant au-dessous de cette valeur, la fonction φ augmente, ce qui correspond bien aux résultats mis en évidence par les courbes de la figure 1. Il suffirait d'augmenter les dimensions du modèle réduit pour obtenir une application plus rigoureuse de la loi des ouvrages courts, à la fin du remplissage.

En résumé, les expériences qui font l'objet de cette Note sont de nature à faire disparaître les incertitudes qui pourraient subsister dans l'étude sur modèle réduit du remplissage des écluses et cales de radoub, et, à un point de vue plus général, elles constituent une confirmation précise de la loi de similitude des ouvrages courts, c'est-à-dire de la constance de la fonction φ dans un domaine non encore atteint.

CORRESPONDANCE.

GÉOMÉTRIE INFINITÉSIMALE. — *Sur la représentation conforme.* Note de M. G. Tzitzéica.

Je me suis proposé d'étudier la courbure des courbes correspondantes dans une représentation conforme.

1. Soit $Z=f(z)$ une fonction holomorphe et univalente dans une certaine région simplement connexe du plan z, par exemple à l'intérieur du cercle $|z|=1$. A la courbe (c) analytique $z=z(t)$ de cette région correspond dans le plan Z une courbe (C) analytique $Z=f[z(t)]$. Désignons

([1]) On remarque la régularité de la courbe de variation de la fonction φ pour des expériences mettant en jeu une puissance aussi élevée, qui atteint 15000 HP.

par k et K les courbures des courbes (c) et (C) aux points correspondants m et M.

On a alors la formule fondamentale

$$(1) \qquad K = \frac{k}{|f'(z)|} + \frac{d}{dn}\left[\frac{1}{|f'(z)|}\right],$$

où d/dn est la dérivée suivant la normale à (c) au point m.

2. Le problème *local* de la correspondance des courbures devient intuitif, si on le décompose en trois problèmes simples :

a. Considérons tout d'abord les courbes (c) du plan z tangentes en m à la droite mt. La relation (1) prouve que les centres de courbure des courbes correspondantes forment sur les normales fixes respectives deux divisions homographiques dans lesquelles les points m et M se correspondent.

b. Supposons maintenant que l'on fasse tourner la tangente mt autour de m et que l'on considère l'ensemble c_r des courbes (c) passant par m et dont la courbure en ce point est $k = 1/r$. Les centres de courbure de ces courbes sont évidemment situés sur le cercle de centre m et de rayon r. Pour les courbes correspondantes (C), formant l'ensemble C_r, le lieu des centres de courbure est une conique ayant un foyer au point M qui correspond à m. Je dirai que cette conique K_r est en M *l'indicatrice* de l'ensemble C_r de courbes.

L'indicatrice est une ellipse, une parabole ou une hyperbole selon qu'on a

$$(2) \qquad \frac{1}{k}\left|\frac{f''(z)}{f'(z)}\right| < 1, \quad = 1, \quad > 1,$$

et je dirai, dans ces différents cas, que l'ensemble C_r est en M elliptique, parabolique ou hyperbolique.

Dans le cas où l'ensemble C_r est elliptique en M, toutes les courbes (C) du plan Z passant par M ont en ce point des courbures toutes différentes de zéro, comprises entre deux limites qu'il est facile de déterminer. Ce sont les inverses des distances de M aux sommets focaux de l'ellipse indicatrice.

On voit aisément ce qui se passe dans le cas où l'indicatrice est une parabole ou une hyperbole.

c. Supposons actuellement que la courbure commune $k = 1/r$ des courbes (c) appartenant à l'ensemble c_r varie; on a alors pour les ensembles C_r, au point M, une famille de coniques indicatrices K_r, ayant toutes le même foyer M et la même directrice correspondante.

Il est clair que, pour r suffisamment petit, K_r est une ellipse; que, pour

une valeur r_1 déterminée par

$$\frac{1}{r_1} = \left|\frac{f''(z)}{f'(z)}\right|,$$

elle est une parabole et que pour $r > r_1$ elle est une hyperbole.

Le problème local des courbures est ainsi complètement étudié.

3. Considérons maintenant, dans la région où $f(z)$ est holomorphe et univalente, une courbe fermée (c), par exemple un cercle de rayon r. En chaque point m de cette courbe on a un ensemble c_r auquel appartient la courbe (c) elle-même. Si l'indicatrice K_r, en chaque point de la courbe correspondante (C), est une ellipse, je dirai que (C) est une *courbe elliptique*. Il est manifeste que toute courbe elliptique est convexe, mais que la réciproque n'est pas toujours vraie.

J'appliquerai ces considérations à deux problèmes particuliers :

a. Prenons d'abord la représentation donnée par $Z = e^z$. Alors tout cercle du plan z et de rayon $r < 1$ a pour image une courbe elliptique.

b. Soit

$$Z = z + a_2 z^2 + \ldots$$

une fonction holomorphe et univalente à l'intérieur du cercle $(z) = 1$ et considérons le cercle concentrique $|z| = r < 1$. J'ai démontré que l'image de ce cercle est une courbe elliptique pour

$$r < \frac{\sqrt{7} - 2}{3}.$$

GÉOMÉTRIE. — *Sur les caractéristiques du tore.*
Note [1] de M. **Torsten Carleman.**

Nous nous proposons de démontrer le théorème suivant. Désignons par p, p_0, ... des points situés sur la circonférence C de rayon 1 et de centre O. Soit $p = \omega(p_0)$ une transformation biunivoque et continue qui transforme C en elle-même avec conservation du sens de parcours. Soit $F(p)$ une fonction continue et uniforme sur C. Cela posé, en désignant par $p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots$ les conséquents de p_0 nous pouvons affirmer que la limite

$$\lim_{n \to \infty} \frac{F(p_0) + F(p_1) + \ldots + F(p_{n-1})}{n} = \Phi(p_0)$$

---

[1] Séance du 22 août 1932.

existe quel que soit le point initial p_0. $\Phi(p_0)$ est évidemment un invariant pour la transformation $\omega(p_0)$. Ce théorème s'obtient facilement au moyen d'un théorème fondamental sur l'approximation des fonctions continues dû à M. F. Riesz (*Ann. de l'École Normale*, 1911). Si la transformation $\omega(p)$ admet un point invariant, la suite des points p_0, p_1, ..., p_n, ... converge vers un point limite. Le théorème est dans ce cas évident. Il en est de même si une transformation itérée $\omega_r(p)$ admet un point invariant. Les suites $p_{r\nu+k}(\nu = 0, 1, 2, \ldots)$ convergent, en effet, dans ce cas vers des limites bien déterminées pour $\nu \to \infty (k = 0, 1, \ldots, r-1)$. Nous pouvons donc, sans restreindre la généralité, supposer que tous les conséquents d'un point p_0 quelconque soient différents entre eux. Désignons par E′ l'ensemble dérivé de l'ensemble E des points $p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots$. Soient G_1 l'ensemble des fonctions $f(p)$ uniformes et continues sur C, G_2 l'ensemble des fonctions $\varphi(p)$ uniformes et continues sur C et s'annulant sur E′, c une constante arbitraire.

Nous avons le théorème suivant : Étant donné une fonction continue et uniforme $F(p)$ et une quantité positive ε aussi petite que l'on veut, on peut trouver une fonction de la forme

$$f[\omega(p)] - f(p) + \varphi(p) + c$$

telle qu'on ait

$$|F(p) - \{f[\omega(p)] - \varphi(p)\} - \varphi(p) - c| < \varepsilon. \tag{1}$$

En effet, pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit, d'après le théorème de M. F. Riesz, que chaque fonction $\alpha(\theta)$ ($\theta =$ l'angle du rayon Op avec un rayon fixe) à variation bornée et satisfaisant aux conditions

$$\alpha(\theta + 2\pi) = \alpha(\theta) + \gamma \qquad (\gamma = \text{const.}),$$
$$\alpha(\theta + 0) + \alpha(\theta - 0) = 2\alpha(\theta),$$

$$\int_C d\alpha = 0, \tag{2}$$

$$\int_C \varphi(p)\, d\alpha = 0 \qquad (\varphi = \text{fonction quelconque de } G_2), \tag{3}$$

$$\int_C \{f[\omega(p)] - f(p)\}\, d\alpha = 0 \qquad (f = \text{fonction quelconque de } G_1) \tag{4}$$

soit identiquement constante. La relation (2) entraîne $\gamma = 0$, c'est-à-dire que α est uniforme sur C. (4) peut encore s'écrire

$$\int_C f(p)\, d\{\alpha[\omega(p)] - \alpha(p)\},$$

d'où l'on conclut

$$\alpha[\omega(p)] - \alpha(p) = \text{const.} = k, \tag{5}$$

$\alpha(p)$ est nécessairement continue. Si l'on avait, en effet, un point de discontinuité q_0 avec $|\alpha(q_0+0) - \alpha(q_0-0)| \neq 0$ on aurait à cause de (5) la même discontinuité en les conséquents $q_1 q_2 \ldots q_n$ (qui sont tous différents en vertu de nos hypothèses).

Or cela est impossible, la variation de $\alpha(p)$ étant finie. On déduit de (5)

$$\alpha(p_1) - \alpha(p_0) = k, \qquad \alpha(p_n) - \alpha(p_0) = nk.$$

Comme le premier membre de la dernière équation reste fini pour $n \to \infty$ on trouve $k = 0$ et par conséquent $\alpha(p_n) = \alpha(p_0)$. $\alpha(p)$ est donc égale à la constante $\alpha(p_0)$ sur $E + E'$. L'équation (3) montre que $\alpha(p)$ est constante sur tous les intervalles contigus qui appartiennent à l'ensemble fermé E'. Cela entraîne, en tenant compte de la continuité de $\alpha(p)$, que $\alpha(p) = \text{const.}$ sur toute la circonférence C. C. Q. F. D.

Comme $\varphi(p)$ s'annule sur E' et la distance de p_n à E' tend vers zéro pour $n \to \infty$ nous avons

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{\nu=0}^{n-1} \varphi(p_\nu) = 0.$$

En tenant compte aussi de la relation

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{\nu=0}^{n-1} [f(p_{\nu+1}) - f(p_\nu)] = 0.$$

on trouve au moyen de l'inégalité (1)

$$\overline{\lim_{\nu \to \infty}} \frac{1}{n} \sum_{\nu=0}^{n-1} F(p_\nu) - \underline{\lim_{\nu \to \infty}} \frac{1}{n} \sum_{\nu=0}^{n-1} F(p_\nu) < 2\varepsilon,$$

ce qui démontre notre proposition.

Le théorème que nous venons de démontrer conduit aisément à la proposition suivante sur les caractéristiques du tore. Désignons par φ l'angle du méridien d'un point M du tore avec un méridien fixe et par θ l'angle de la normale en M avec le plan de l'équateur (cf. les notations dans la Note de M. Denjoy, *Comptes rendus*, 7 mars 1932). Soient $F(\varphi, \theta)$ et $A(\varphi, \theta)$ deux fonctions uniformes et continues sur le tore et supposons que A satisfasse à une condition de Lipschitz par rapport à θ.

Soit $\theta = \theta(\varphi)$ l'équation d'une caractéristique quelconque de l'équation différentielle

$$\frac{d\theta}{d\varphi} = \mathrm{A}(\varphi, \theta).$$

Alors la limite

$$\lim_{\varphi \to \infty} \frac{1}{\varphi} \int_0^{\varphi} \mathrm{F}[\varphi, \theta(\varphi)]\, d\varphi$$

existe.

GÉOMÉTRIE. — *Sur diverses notions infinitésimales.* Note de M. **Georges Bouligand**, transmise par M. Élie Cartan.

1. Dans un Ouvrage récent([1]), j'ai appelé (γ) le groupe des homéomorphies douées d'une transformation linéaire tangente *continue* et d'un jacobien positif au sens strict. Son champ d'invariance ou *topologie du premier ordre* englobe le contingent et le paratingent. J'observe d'abord que mon raisonnement des n°s 67 et 69 étend la covariance du contingent au groupe (g_1), obtenu en renonçant à la continuité de la transformation linéaire tangente. Cela posé, soit V l'espace auxiliaire des éléments $(x, y, z; u, v, w)$ qui synthétisent chacun un point et sa vitesse; à toute homéomorphie h de (g_1) s'attache dans V une autre homéomorphie H; pour qu'elle appartienne au groupe (G_1), jouant dans V le rôle de (g_1) dans l'espace initial, il faut et il suffit que les fonctions déterminant h aient des dérivées secondes. Soit (g_2) le sous-groupe de (g_1) ainsi défini.

2. Sous la forme de M. G. Rabaté, le contingent circulaire n'est pas covariant de (g_2), à cause de l'intervention des demi-plans des cercles de rayon infini ([2]). Par contre, M. Élie Cartan (à qui je suis redevable, pour les questions du présent paragraphe, d'un important échange de vues) a noté que la présence des demi-plans des cercles de rayon nul ne trouble pas cette covariance. Il y a donc pluralité des définitions du contingent circulaire, suivant la convention adoptée pour distancier la famille des cercles

---

([1]) *Introduction à la géométrie infinitésimale directe*, avec une préface de M. E. Cartan, Paris, Vuibert, 1932, p. 66.

([2]) On le verra en appliquant la transformation $X = x$, $Y = y + x^2$, $Z = z$ aux deux courbes $y - x^3 = z - x^4 = 0$ et $y - x^3 = z - x^3 - x^4 = 0$. De deux plans osculateurs distincts à l'origine, on revient à un plan osculateur commun. Le même exemple montre que le biparatingent n'est pas covariant de (γ).

qui en sont les éléments. La communauté de contingent circulaire au sens de M. Rabaté ne peut transgresser le champ projectif. Pour obtenir une notion covariante dans g_2, il faut modifier la définition de la distance (p. 25 de mon Ouvrage cité) en laissant subsister un hémisphère, l'autre seul étant remplacé par la portion de cylindre associée par projection orthographique. Le choix d'une distance généralisée apparaît donc lié au groupe vis-à-vis duquel on désire la covariance du contingent pour la définition duquel cette distance est requise.

3. La pluralité remarquée s'élargit lorsqu'on note la possibilité de ramener la notion du contingent circulaire à celle du contingent ordinaire dans l'espace V : sous cette forme, il y a encore covariance par (g_2), dans les mêmes conditions que ci-dessus. L'adoption de ce point de vue peut incorporer au contingent circulaire des éléments qui n'intervenaient pas avec la forme initiale de la définition.

4. Grâce à l'introduction de deux contingents formés de demi-cercles, le théorème de Meusnier, issu de la théorie des surfaces et prolongeable, comme il est connu, aux trajectoires orthogonales des champs de vecteurs, prend sa forme la plus simple et la plus large en théorie des ensembles. Supposons qu'au point d'accumulation O de l'ensemble E, une perpendiculaire Z à la demi-tangente Ox soit telle que dans le demi-plan (Z, x) il n'y ait qu'un demi-cercle C de rayon non nul qui soit limite de demi-cercles C_M passant par O, par un point M infiniment voisin sur E, et de diamètre porté par Z. Alors, le contingent hémicirculaire de E relatif à Ox (qui comprend les éléments d'accumulation des demi-cercles passant par O, par un point M de E infiniment voisin de O, d'abscisse positive, et ayant leur diamètre dans le plan $x=0$) est tout entier sur la sphère décrite par C tournant autour de Z (ou mieux sur son hémisphère $x>0$) : à cela se réduit le théorème de Meusnier. Notamment, prenons un champ vectoriel dont les trajectoires orthogonales soient données, au voisinage de l'origine, par l'équation (avec φ^2 dérivable et homogène degré 2)

$$d[z-\varphi_2(x, y)]+\sqrt{x^2+y^2}[\alpha(x, y, z)\, dx+\beta(x, y, z)\, dy]=0,$$

où α, β tendent vers zéro quand le point (x, y, z) tend vers l'origine. Les trajectoires issues de l'origine dont les projections sur xOy ne dépassent pas en courbure une limite assignée sont comprises entre deux surfaces S' et S'' sur chacune desquelles $z-\varphi_2$ est un infiniment petit vis-à-vis de x^2+y^2. La réunion de ces trajectoires est (au même titre que la

réunion de S′ et S″) un ensemble auquel s'applique à l'origine la précédente forme du théorème de Meusnier.

5. Soit un ensemble E d'éléments M admettant une définition du voisinage, et une loi attachant à tout M de E une collection $\gamma(M)$ d'éléments de nature permanente admettant une définition du voisinage. Si $\gamma(M_0)$ inclut les éléments d'accumulation de $\gamma(M)$ quand M est inclus dans un voisinage indéfiniment resserré de M_0, je conviens qu'il y a *semi-continuité d'inclusion* (S. C. I.) de $\gamma(M)$ en M_0. Aux exemples que j'en ai donnés antérieurement [1], s'ajoute le suivant : M est un ensemble ponctuel fermé de l'espace euclidien et $\gamma(M)$ son intersection avec un ensemble particulier de la même famille. Par cette remarque, l'effet de semi-continuité ordinaire signalé au n° 28 de mon Ouvrage et utilisé pour un théorème d'existence du plan tangent est rattaché à la S. C. I.

THÉORIE DES FONCTIONS. — *Sur le développement en série des fonctions monogènes uniformes*. Note [2] de M. **Alexandre Ghika**, transmise par M. Émile Borel.

Considérons une région bornée du plan et l'ensemble parfait D, défini par M. Borel [3], en excluant de cette région les points intérieurs, au sens strict, à une infinité de cercles C_n ne se coupant pas deux à deux, dont les centres sont denses au moins dans une certaine aire et de rayon r_n vérifiant les inégalités

$$\frac{r'_n}{2^{p+1}} < r_n < \frac{r'_n}{2^p} \qquad \text{et} \qquad \lim_{n=\infty} \frac{n}{\log\log\log\frac{1}{r'_n}} = 0,$$

p étant un nombre fixe.

Soit Δ_0 le domaine réduit du domaine D, défini au moyen des cercles γ_n concentriques aux cercles C_n, de rayon ρ_n (comme D au moyen des C_n) vérifiant les inégalités

$$\frac{\rho'_n}{2^{p+1}} < \rho_n < \frac{\rho'_n}{2^p} \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{\rho'^2_n} < \log\log\frac{1}{r'_n}.$$

(1) *Comptes rendus*, **194**, 1932, p. 1060. Observons que la S. C. I. du système des projetantes fait du théorème A de ma Note des *Comptes rendus*, **194**, 1932, p. 1882, une conséquence directe du théorème B, dont la démonstration est immédiate.

(2) Séance du 25 juillet 1932.

(3) Borel, *Leçons sur les fonctions monogènes uniformes d'une variable complexe* (Paris, Gauthier-Villars, éd.), 1917.

Nous supposerons de plus que D est limité par une courbe rectifiable fermée simple C_0 située sur Δ_0 et nous désignerons par Δ le domaine Δ_0 limité à C_0 et duquel on exclut le voisinage de C_0.

Nous avons montré que la fonction $1/(z-x)^m$ est de carré de module sommable (au sens de M. Lebesgue) quand m est fini, par rapport à z le long de la frontière C de D, uniformément par rapport à x situé sur Δ.

Considérons les fonctions $f(z)$:

1° Définies le long de C et de carré de module sommable;

2° Vérifiant la condition

$$\sum_{i=1}^{\infty} \int_{C_i} \frac{f(z)}{z-x}\, dz = 0,$$

quand x est intérieur, au sens de Weierstrass, au domaine complémentaire par rapport au plan du domaine fermé D;

3° Définies aux points de D par l'équation

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{C_n} \frac{f(z)}{z-x}\, dz.$$

seulement où cette série est convergente.

Cette série est absolument et uniformément convergente sur le domaine Δ et représente par suite une fonction monogène uniforme au sens de M. Borel.

Réciproquement les fonctions monogènes uniformes de M. Borel, relativement au domaine fermé D, vérifient les trois conditions précédentes.

Enfin, considérons la suite multiple de fonctions

$$(z-a_0)^n, \quad \frac{1}{(z-a_p)^{n+1}} \qquad (n=0, 1, 2, 3, \ldots; p=1, 2, 3, \ldots);$$

le point a_0 appartenant au domaine fermé Δ et a_p étant intérieur, au sens de Weierstrass, au cercle C_p.

Nous avons démontré que cette suite est fermée par rapport à l'ensemble des fonctions précédemment définies relativement à un même domaine D.

Il en résulte que le système $\varphi_n(z)$ $(n=0, 1, 2, 3, \ldots)$, obtenu en orthogonalisant et normalisant la suite précédente le long de C,

$$\int_C \varphi_n(z)\,\overline{\varphi_m(z)}\, ds = \begin{matrix} 1 & n=m \\ 0 & n\neq m \end{matrix} \qquad (ds = |dz|).$$

$\overline{\varphi_m(z)}$ désignant la quantité imaginaire conjuguée de $\varphi_m(z)$, est un système fermé par rapport à ce même ensemble de fonctions.

Il est à remarquer que $\varphi_n(z)(n=0, 1, 2, 3, \ldots)$ *sont des fonctions rationnelles* fort simples.

On a

$$f(z) = \sum [illegible]$$

avec

$$f_n = \int [illegible] \, ds.$$

la série convergeant absolument et uniformément sur le domaine fermé Δ *à connexion d'ordre infini et en moyenne le long de* C.

Cette série généralise la série de Taylor pour un pareil domaine à connexion d'ordre infini.

Cela montre encore mieux qu'il n'y a pas de différence essentielle entre les fonctions holomorphes et les fonctions monogènes uniformes.

MÉCANIQUE CÉLESTE. — *État limite, résultant des marées, pour le mouvement d'un système planétaire.* Note [1] de M. **Giulio Krall**, transmise par M. Vito Volterra.

D'après Sir G. Darwin, dans le passé et dans l'avenir des mondes, du système solaire en particulier, les marées ont eu et auront une influence peut-être essentielle. Le premier, il en releva les effets les plus importants, et tira de leur étude systématique d'intéressantes conséquences cosmogoniques.

Dans plusieurs recherches qui sont devenues classiques, non seulement il formula des prévisions sur le plus lointain futur, mais il fit l'histoire, depuis la genèse, de certaines planètes, avec d'intéressantes références à la Terre et à la Lune.

Il se limita toujours, et pour ses buts cela suffisait, au cas de deux corps. Il supposa la masse de l'un, dépassant de beaucoup celle de l'autre, de sorte que l'on pouvait négliger le mouvement du premier corps.

Il parvint ainsi à reconnaître la tendance des orbites elliptiques à

---

(1) Séance du 1er août 1932.

devenir des orbites circulaires, et il reconnut que les durées des révolutions tendent à égaler celles de rotation.

Il parvint ensuite à cette dernière conséquence, d'après une suggestion de Lord Kelvin, en tenant compte du fait énergétique que les marées sont accompagnées d'une lente et incessante action dissipative. En vertu de celle-ci, l'énergie totale du système se dégrade, en satisfaisant toujours (puisqu'il s'agit de seules actions internes) à l'*intégrale des moments*, jusqu'à une valeur minimum qui satisfait à la condition d'égalité sus-indiquée. C'est ce qu'il eut à vérifier, en supposant initialement et durant toute l'action dissipative que l'orbite était circulaire. Il posa même le problème de telle façon que cette hypothèse paraissait essentielle.

Poursuivant dans cette direction il me fut possible, par des extensions faciles, de reconnaître que, *dans le mouvement képlérien de deux corps célestes gravitant, dont le rapport des masses est quelconque, et doués chacun de mouvement précessionnel, outre la tendance asymptotique de la trajectoire à devenir circulaire, il arrive que les précessions tendent à devenir des rotations, leurs axes de rotation tendent à se disposer normalement au plan du mouvement. En même temps les vitesses angulaires tendent à égaler les vitesses de révolution.*

Une allure si simple du mouvement limite et la facilité avec laquelle il fut possible de la prévoir faisaient pressentir à des résultats également simples pour le mouvement final de trois corps.

Il suffit en effet de reconnaître dans l'allure finale du mouvement les traits typiques de certaines solutions dites *stationnaires* de Routh et Levi-Civita. On peut alors en conclure, sans effectuer de trop longs calculs, que, *dans le cas de trois corps gravitants doués chacun de mouvement précessionnel, l'effet des marées tend à orienter le plan du mouvement normalement au moment invariant total de la quantité de mouvement.*

Le mouvement orbital tend vers un mouvement lagrangien, c'est-à-dire les corps tendent à se disposer aux sommets d'un triangle équilatère, à côtés invariables, tournant, avec une vitesse uniforme, autour du centre des masses. Les précessions à leur tour tendent à devenir des rotations, ayant la même vitesse angulaire, et les axes tendent à se disposer normalement au plan du mouvement.

Successivement, en passant au problème général d'un système avec un nombre quelconque de corps, je suis arrivé à reconnaître que *les orbites des corps d'un système planétaire, sujet à des marées ou à toute action dissipative interne, tendent vers des circonférences ayant un centre commun, et situées*

dans un même plan, bien déterminé par les données initiales. Les axes des précessions dégénérantes (rotations) tendent à devenir normales à ce plan. Les durées de ces rotations tendent à égaler la durée de la révolution.

OPTIQUE. — *Sur un artifice susceptible d'augmenter la précision des mesures spectrophotométriques visuelles.* Note de M. **P. Vaillant**, transmise par M. A. Cotton.

Dans l'étude directe au spectrophotomètre des spectres d'émission ou d'absorption, l'œil reste supérieur à la cellule photo-électrique lorsque les éclats à comparer sont faibles, en particulier lorsque, voulant faire porter les mesures sur des radiations bien définies, on opère avec une fente collimatrice fine. La précision reste d'ailleurs peu considérable, sauf dans la partie moyenne du spectre. On peut l'augmenter sensiblement en disposant, en avant de la lunette d'observation, une lame de verre mince inclinée à 45° sur l'axe et qui superpose par réflexion, à leur entrée dans la lunette, aux deux faisceaux à comparer, un faisceau coloré d'intensité uniforme provenant d'un collimateur auxiliaire, faisceau dont l'intensité et la teinte sont convenablement choisies. L'importance relative d'une différence d'éclat entre les deux plages sur lesquelles porte la comparaison photométrique s'en trouve diminuée, mais cette perte est plus que compensée par le fait qu'à la sensation d'inégalité d'éclat des deux plages se superpose celle de leur inégalité de coloration (1).

Dans les mesures d'absorption sur liquides colorés, la lumière blanche provenant du collimateur auxiliaire peut être filtrée par une cuve contenant le liquide même à expérimenter. Le flux additionnel est alors plus ou moins complémentaire du flux étudié (2). Si l'intensité de ce flux additionnel est convenablement réglée, à l'équilibre, les deux plages apparaissent d'une même teinte à peu près blanche et, lorsque cet équilibre est détruit, prennent des teintes plus ou moins complémentaires. Mais on obtient d'aussi bons résultats par l'emploi de filtres quasi monochromatiques du type Calmels dont on choisit la région de transparence de façon à obtenir le maximum de contraste. Celui-ci est d'ailleurs affaire d'appréciation personnelle. Le collimateur auxiliaire sera par exemple éclairé par

---

(1) Le gain de précision réalisé dépend d'ailleurs de l'observateur, des sensibilités relatives de l'œil aux différences d'éclat et de coloration.

(2) Du moins dans le cas d'un liquide qui ne présente qu'une bande d'absorption dans le visible.

une lampe à incandescence dans laquelle un rhéostat permettra de faire varier à volonté le courant. On réglera celui-ci de façon qu'à inégalité donnée d'éclat des deux plages, la différence des colorations apparaisse maximum.

J'ai effectué quelques mesures par ce procédé au spectrophotomètre Gouy (¹). Le gain obtenu est peu appréciable dans les parties verte et jaune du spectre où l'œil est particulièrement sensible, mais l'artifice devient avantageux aux limites du visible où les mesures directes sont beaucoup moins précises.

A l'extrémité rouge, alors que, par le procédé habituel, la précision restait nettement inférieure au centième, j'ai pu déterminer, à près du deux-centième, le rapport des intensités des flux provenant des deux collimateurs par l'emploi d'un filtre (λ 5500-5900) placé derrière le collimateur auxiliaire. Dix mesures successives du rapport ont donné par exemple les valeurs suivantes :

$$10^{-4} \times 3066 \quad 3070 \quad 3014 \quad 3068 \quad 3095 \quad 3025 \quad 3078 \quad 3065 \quad 3076 \quad 3067$$

définissant la valeur moyenne

$$10^{-4}\,(3062 \pm 17).$$

A l'autre extrémité du spectre, les mesures restent moins précises, surtout en raison de la faible émission des sources employées. L'approximation qui atteint le cinquantième (filtre $\lambda\lambda > 6500$) est toutefois encore nettement supérieure à celle (erreur atteignant 1/20ᵉ environ) que j'obtenais sans flux auxiliaire

$$10^{-3} \times 628 \quad 594 \quad 620 \quad 628 \quad 611 \quad 605 \quad 595 \quad 631 \quad 627 \quad 624$$

valeur moyenne

$$10^{-3}\,(616 \pm 12)\ (^2).$$

(¹) Dans le cas de l'appareil Gouy et des appareils analogues, où le prisme de sortie est solidaire de la lunette, on peut évidemment substituer à la réflexion du flux auxiliaire sur une lame de verre, sa réflexion sur la face d'émergence du prisme de sortie. Le collimateur auxiliaire est alors rendu lui aussi solidaire de la lunette.

Lorsque, comme dans l'appareil Gouy, les sources à comparer éclairent deux fentes collimatrices indépendantes, il est indispensable de donner à ces fentes même largeur pour obtenir, par superposition d'un flux auxiliaire, deux plages de même coloration. Il en est d'ailleurs encore de même, mais à un degré moindre, sans l'emploi du flux auxiliaire.

(²) Les écarts ne dépasseraient pas 1/100ᵉ si l'on ne tenait pas compte des mesures 2 et 7 qui s'écartent beaucoup plus que les autres de la valeur moyenne.

CHIMIE ORGANIQUE. — *Sur des combinaisons d'acides arsiniques et d'acide chlorhydrique.* Note (¹) de M. J. Prat, présentée par M. G. Urbain.

Divers auteurs ont déjà signalé le caractère amphotère de certains acides diarylarsiniques. Il était à prévoir que ce caractère se retrouverait dans les acides monoarylarsiniques.

Dans cette série, seuls les chlorhydrates de l'acide 3-acétylamino-4-oxyphénylarsinique et de l'acide 2-oxy-4-acétylaminophénylarsinique ont été signalés par M. Baranger (*Thèse*, Paris, 1931). Mais ces acides possèdent des groupes OH et amino (acétylés, il est vrai). On pouvait supposer ces derniers responsables de la fixation d'HCl sur l'acide arsinique. Pour éliminer cette objection, la recherche des chlorhydrates de l'acide phénylarsinique et de l'acide *o*-méthylphénylarsinique a été entreprise.

I. *Acide phénylarsinique.* — L'examen des courbes de solubilité à 25°,7 de l'acide phénylarsinique dans des solutions aqueuses d'HCl de concentrations croissantes accuse nettement, par une diminution brusque de solubilité, la formation d'un chlorhydrate.

Il est à remarquer que les courbes II et III tendent l'une vers l'autre de sorte que la solution contient un nombre égal de molécules HCl et $C^6H^5AsO^3H^2$ au moment où le chlorhydrate commence à précipiter.

La séparation de ce chlorhydrate des eaux mères dans lesquelles il prend naissance ne peut pas s'effectuer par simple filtration. L'humidité atmosphérique, absorbée fortement, suffirait à le dissocier. Pour le préparer, on le lave plusieurs fois sur filtre avec du chloroforme sec à 0°, puis on évapore ce chloroforme par un courant d'air sec. On obtient ainsi des petites tablettes qui se conservent bien en tube fermé mais se liquéfient à l'air et, après dissociation, recristallisent en longues aiguilles d'acide phénylarsinique.

Ce chlorhydrate est légèrement soluble à froid dans le chloroforme qui le dissout bien à chaud. Il peut par suite être recristallisé dans ce solvant.

L'analyse donne 1 molécule HCl pour 1 molécule $C^6H^5AsO^3H^2$:

As 31,6 pour 100 trouvé pour 31,4 pour 100 calculé;

Cl 14,6 pour 100 trouvé pour 14,8 pour 100 calculé.

II. *Acide o-méthylphénylarsinique.* — Les courbes de solubilité à 25°,7 de l'acide *o*-méthylphénylarsinique mettent en évidence la précipitation du chlorhydrate pour des concentrations initiales de la liqueur HCl voisine de

(¹) Séance du 22 août 1932.

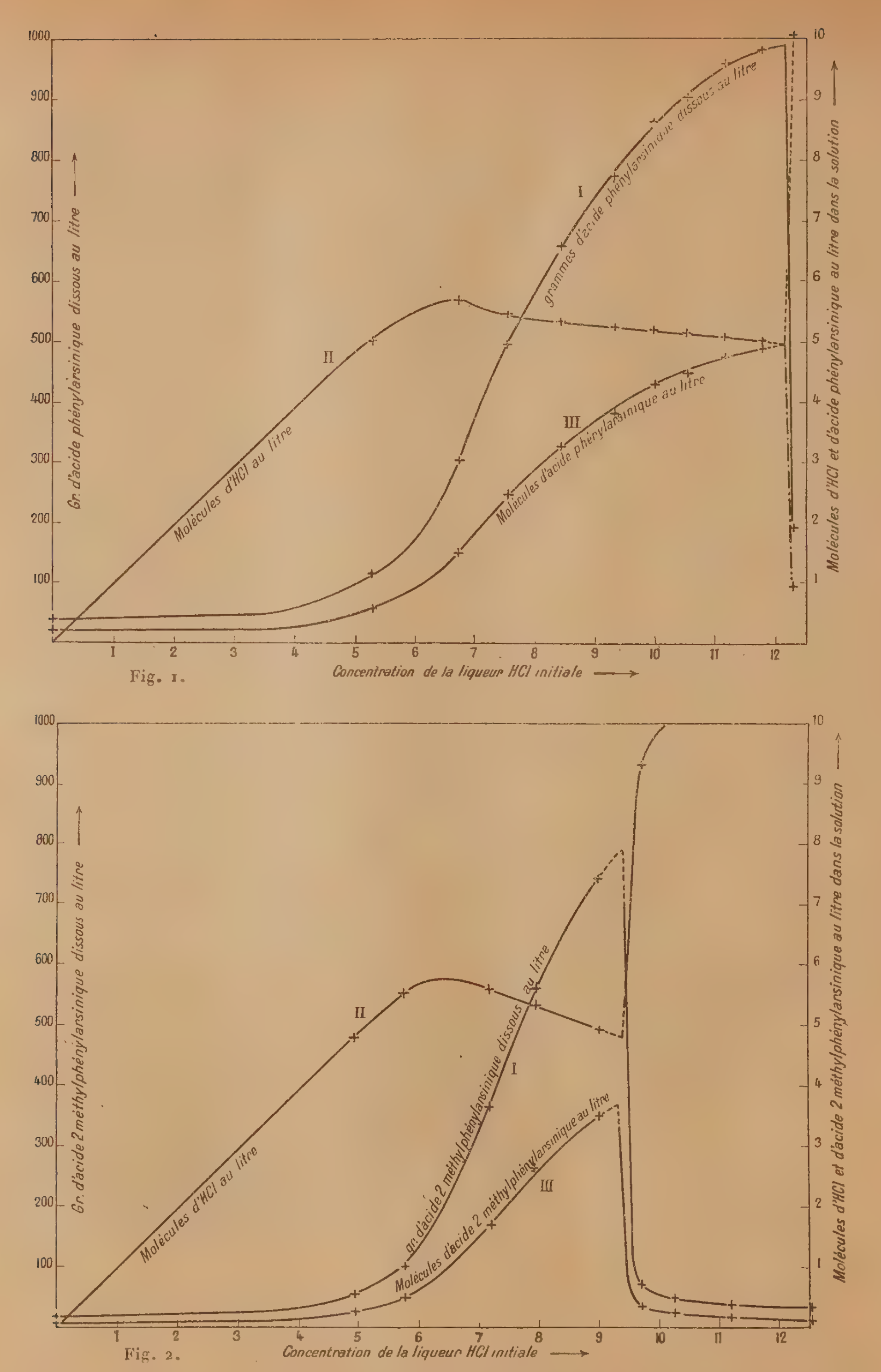


Fig. 1.

Fig. 2.

I, nombre de grammes d'acide arsinique dissous au litre; II, nombre de molécules d'acide chlorhydrique au litre dans la solution; III, nombre de molécules d'acide arsinique au litre dans la solution.

9,5 N au lieu de 12 N pour l'acide phénylarsinique. La substitution d'un groupe méthyl dans le radical phényl lié à As paraît donc rendre le chlorhydrate moins dissociable. En fait sa préparation est plus facile ; il est toutefois utile, pour l'obtenir sans dissociation partielle, d'opérer comme pour le précédent.

Ce chlorhydrate se présente sous la forme de longs bâtonnets. A l'air, il se dissocie lentement après liquéfaction et recristallise en acide *o*-méthylrhénylarsinique.

Il est, comme le précédent, soluble dans le chloroforme dans lequel il peut être recristallisé.

L'analyse donne 1^{mol} HCl pour 1^{mol} $CH^3.C^6H^4.AsO^3H^2$ soit :

As 29,8 pour 100 trouvé pour 29,7 pour 100 calculé;

Cl 14,3 pour 100 trouvé pour 14,4 pour 100 calculé.

III. *Acide p-acétylaminophénylarsinique.* — Le chlorhydrate de cet acide a été également préparé. Malgré la présence du groupe amino (acétylé) on doit vraisemblablement le considérer comme appartenant à la même classe que les précédents. La présence de l'azote facilite la liaison à HCl cependant, quoique beaucoup plus stable que les précédents (il se conserve longtemps à l'air), il est instantanément dissocié par l'eau. La transformation peut être facilement suivie au microscope.

L'analyse a donné 1^{mol} HCl pour 1^{mol} $CH^3C^6H^4AsO^3H^2$:

As 25,4 pour 100 trouvé au lieu de 25,4 pour 100 calculé.

Cl 12,3 pour 100 trouvé au lieu de 12,3 calculé.

BOTANIQUE. — *Sur la biologie de* Codium Bursa. Note de M. **Vale Vouk**, transmise par M. L. Mangin.

Le *Codium Bursa* (L.) Ag., algue verte croissant dans la Méditerranée et l'Océan, a été étudié, au point de vue morphologique, plusieurs fois, mais, en ce qui concerne sa biologie et son écologie, nos connaissances sont très restreintes (C. O. Schmidt, *Bibliotheca botanica*, 91, 1923). En étudiant la végétation d'algues croissant aux environs de l'Institut de biologie et d'océanographie marine à Split (Yougoslavie) j'ai examiné plusieurs fois de grands thalles de cette algue, dont la forme sphérique attire notre attention. A l'état frais, comme on sait, le thalle est très gonflé de sorte que, si l'on y fait à l'aide d'un scalpel une incision, il s'échappe un jet de liquide et les bords de l'incision se courbent dans la cavité ouverte. Pour se convaincre mieux de la tension élevée du liquide

intérieur du *Codium* il suffit d'introduire dans le thalle un tube de verre, aminci en pointe. Si l'on en rompt alors la pointe, par une pression légère, on voit s'élever dans le tube le liquide intérieur jusqu'à 10^{cm} de hauteur. Mais ce phénomène n'est accompagné d'aucune sorte de détente de la surface. Ce fait est d'un certain intérêt parce qu'on a cru jusqu'à présent que le gonflement sphérique n'est que le simple résultat de la tension de traction et celle de pression entre les palissades et les tuyaux axiaux. A mon avis, il y a certaines différences osmotiques entre le thalle du *Codium* et l'eau de mer environnante. La nature du liquide intérieur devrait être, d'après Hauck (1855), à peu près la même que celle du suc cellulaire, tandis que C. O. Schmidt est d'avis qu'il ne diffère point de l'eau de mer ambiante. En ce qui concerne les qualités chimiques et osmotiques, le liquide en question n'a pas été étudié, à ma connaissance, jusqu'à présent.

M. A. Ercegović a accompli, à ma demande, les déterminations de salinité du liquide intérieur de quelques exemplaires. En réalité, on y a trouvé une salinité au-dessus de celle qu'on a constatée dans l'eau de mer provenant de la même profondeur où *Codium* était recueilli. Huit déterminations ont donné, en moyenne, le résultat suivant :

	Salinité pour 1000.
Dans le *Codium*......................	38,29
Hors du *Codium*......................	37,57

Des recherches ultérieures montreront si cette augmentation de salinité est partout constante. En outre, une analyse exacte de la composition chimique du contenu doit être exécutée, ce qui projettera quelque lumière sur les qualités physiologiques du thalle du *Codium*.

L'étude de morphologie intérieure nous a amené à découvrir un autre fait intéressant. On peut observer sur la surface intérieure, entrelacée de filaments tangentiels, surtout au milieu au-dessus du point de fixation et dans son voisinage, des endroits rougeâtres. Si l'on y prend, à l'aide d'une pincette, un peu de ce tissu, qui est ordinairement muqueux, et qu'on l'examine, faiblement grossi on rencontre entre les filaments du *Codium* une masse épaisse de filaments minces, teints d'une nuance rougeâtre. A l'aide d'un grossissement plus fort on peut reconnaître que ces filaments sont des *Cyanophycées*. J'ai trouvé dans divers exemplaires de *Codium* différentes espèces parmi lesquelles quelques formes nouvelles. Ce sont surtout des *Oscillariées* filamenteuses, notamment des *Phormidium*, des *Lyngbya* et des *Oscillatoria*. En outre j'y ai trouvé des espèces de *Plectonema*,

de *Microchæte*, de *Calothrix* et même de *Gloeocapsa*. L'étude de ces *Cyanophycées*, croissant dans le *Codium*, formera l'objet spécial de mes recherches ([1]). Il est intéressant, non pas étonnant, que toutes ces *Cyanophycées* soient teintes en rouge. Les *Codium* croissent d'ordinaire à une profondeur de 15^m-40^m, et, en outre, à l'intérieur de leurs thalles la lumière est très réduite de sorte que les *Cyanophycées* présentes, en raison de la lumière affaiblie, sont teintes d'une couleur rougeâtre afin qu'elles puissent bien exploiter la faible lumière violette, conformément à la théorie d'Engelmann-Gaidukoff.

On a, d'ailleurs, déjà observé que les *Cyanophycées* de la mer, provenant d'une plus grande profondeur, sont rouges [Sauvageau ([2]), Funk ([3])]. En étudiant attentivement le contenu de la surface intérieure du thalle, on y peut trouver, en dehors des *Cyanophycées*, quelques espèces de *Diatomées*, qui demandent une étude systématique détaillée. Ce sont certainement des formes bentoniques croissant dans le limon du fond, mais il est possible qu'il s'agisse des formes spéciales qui ne croissent que dans le *Codium*. Des études ultérieures éclairciront ce problème. Si l'on fait centrifuger le liquide du *Codium*, on obtient une quantité remarquable de *Diatomées* surprises en mouvement. Je n'y ai jamais pu trouver de formes planctoniques telles que *Chaetoceras* ou *Rhizosolenia* qu'on peut aisément rencontrer dans l'eau environnante.

En ce qui concerne les organismes animaux, on y peut observer différents protozoaires et radiolaires et dans le thalle des *Cyanophycées* de petits nématodes. Il semble donc que l'intérieur du thalle du *Codium* contienne une flore et une faune spéciales. Ce sera une tâche intéressante d'étudier de plus près les différents facteurs de vie de ces organismes. Des recherches ultérieures effectuées sur des riches matériaux provenant de différents endroits devront établir lesquels de ces habitants habitent le thalle du *Codium* constamment, lesquels s'y associent d'une manière transitoire. En tout cas je peux dès maintenant affirmer que certaines *Cyanophycées* rouges sont des habitants constants du *Codium Bursa*.

([1]) Un Mémoire détaillé sera publié dans un autre Recueil.

([2]) *C. R. Soc. de Biol.*, 65, 1908, p. 98-100.

([3]) *Pubblicazioni della Stazione zoologica di Napoli*, 7, suppl. 1927, p. 238.

PHYSIOLOGIE VÉGÉTALE. — *Sur la méthode de détermination de plasticité des membranes cellulaires.* Note de M. **A. N. J. Heyn**, transmise par M. Molliard.

Dans nos recherches antérieures, nous avons étudié les variations de plasticité des membranes cellulaires dans les coléoptiles d'*Avena sativa*.

La méthode consistait à placer horizontalement, en les fixant par une extrémité, les mêmes régions de coléoptile et en plaçant à l'extrémité opposée un poids, qui provoquait ainsi une faible courbure de l'organe. Au bout d'une demi-heure, 1 ou 2 heures, on déterminait la courbure totale de l'organe et la partie permanente, après enlèvement du poids.

C'est d'après cette courbure permanente que nous avons cru pouvoir déterminer la plasticité des membranes et nous avons montré que celle-ci est augmentée sous l'influence de l'hormone d'allongement cellulaire (auxine).

Van Overbeek et moi avons communiqué que sous l'action de l'hormone, en même temps que la courbure permanente, la courbure élastique (réversible) des tissus turgescents est aussi augmentée. La question se pose donc de savoir si véritablement la plus grande courbure permanente est due à la plus grande plasticité de la membrane ou à la plus grande extensibilité élastique des tissus. On pourrait imaginer, par exemple, que la fixation (par exemple par intussusception ou apposition) de la courbure élastique pourrait être d'autant plus intense que cette courbure élastique est plus grande.

Pour obtenir une réponse à cette question, nous avons étudié la courbure réversible et irréversible provoquée par des poids différents sur des coléoptiles qui avaient snbi ou non l'influence de l'hormone.

Les tableaux que nous reproduisons ici montrent que, même en provoquant une courbure élastique plus grande par un poids plus lourd, la courbure permanente est tout de même beaucoup plus petite dans les organes qui n'ont pas subi l'influence de l'hormone (ou qui ont été décapités depuis 1 heure et demie). Les tableaux représentent les moyennes de 10 plantules toujours.

Tableau I.

Poids (en gr.).	Courbures réversibles.	Courbures irréversibles.	Poids (en gr.).	Courbures réversibles.	Courbures irréversibles.
Cylindres de coléoptile depuis 2 heures					
avec auxine :			*sans auxine :*		
0,80.......	11°,0	21°,4	1,00.......	12°,0	5°,9
Mêmes régions de coléoptile					
normale :			*depuis 1 h. 1/2 sans pointe :*		
0,25.......	4°,3	6°,1	0,80.......	7°,4	2°,8
0,50.......	7°,4	13°,7	1,00.......	8°,4	5°,7
0,80.......	–	24°,5			
0,50.......	7°,3	10°,0	0,80.......	7°,5	3°,3
0,50.......	12°,6	14°,0	0,80.......	13°,5	6°,9

Il n'y a pas non plus un tel rapport entre l'extensibilité élastique des *membranes* comme on peut la déterminer après plasmolyse et la courbure permanente qui peut se produire. Nous avons étudié la variation de l'une et de l'autre pendant l'action de l'hormone.

Une heure et demie après sectionnement de la pointe des coléoptiles des cylindres de celles-ci étaient soumis à l'action de l'hormone pendant deux heures. L'aptitude à être courbé irréversiblement, qui est très petite au commencement (une heure et demie après le sectionnement de la pointe), *augmente* fortement sous cette action et dépasse même celle des coléoptiles normales (avant sectionnement). L'extensibilité élastique des membranes déterminée après plasmolyse, au contraire, *diminue* beaucoup pendant le même temps d'action de l'hormone.

Tableau II.

	Courbures irréversibles.	Extensibilité élastique.
a. Coléoptiles normales.......................	13,3	31,8
b. Céléoptiles depuis 1 heure et demie sans pointe.	2,8	30,8
c. Comme *b* et depuis 2 heures avec auxine......	18,8	24,1
d. Comme *b* et depuis 2 heures sans auxine......	3,4	–

Le résultat de cette expérience constitue aussi une preuve de plus en faveur de notre conception, d'après laquelle en augmentant la plasticité des membranes, l'hormone n'augmente pas l'extensibilité élastique (déterminable après plasmolyse) de celles-ci.

BIOLOGIE EXPÉRIMENTALE. — *Sur le phototropisme des Daphnies; rôle de la mémoire dans le phototropisme.* Note (1) de M. G. **Viaud**, transmise par M. F. Mesnil.

Nous nous sommes proposé d'abord d'établir une méthode de mesure du phototropisme qui soit suffisamment précise, pratique et générale. Nous sommes parti de cette hypothèse que le tropisme, étant un mode d'activité automatique, devait relever de lois analogues à celles qui régissent les forces physiques: et que, s'il en était ainsi, les méthodes employées pour la mesure des forces physiques devaient s'appliquer aux forces d'attraction ou de répulsion tropistiques.

On sait qu'une force physique se mesure par la vitesse qu'elle est capable d'imprimer à un système matériel. Pouvons-nous nous servir de cette proposition pour mesurer la force tropistique? Non, si nous conservons au mot : système matériel son sens mécanique. Car la masse mécanique du corps d'un animal, ou la masse mécanique totale d'un groupe d'animaux, est mue directement par la force mécanique des organes locomoteurs, et indirectement seulement par la force tropistique qui agit sur le système nerveux. Et ce n'est que dans des cas privilégiés que l'une de ces forces est proportionnelle à l'autre.

Nous avons été amené à considérer comme système matériel soumis à l'influence de la force tropistique l'ensemble d'une population, conçue comme concentrée en un point que l'on peut appeler son *centre de gravité*.

La détermination de ce centre, lequel dépend de la position et du nombre des individus, se fait aisément par la méthode des moments, en employant la formule

$$\frac{\Sigma \text{ moments}}{\Sigma \text{ masses élémentaires}},$$

chaque masse élémentaire représentant un individu et étant égale à l'unité.

Le déplacement du centre de gravité de la masse numérique d'une popu-

(1) Séance du 22 août 1932.

lation, à partir d'une origine, en un temps donné, fournit une mesure du phototropisme de la population, *quels que soient les trajets réels accomplis par les individus, et quel que soit leur sens, positif ou négatif*.

Rôle de la mémoire dans le phototropisme. — Nous nous sommes aperçu, en entreprenant une étude du phototropisme chez *Daphnia pulex* (♀ parthénogénétiques), que deux expériences successives portant sur la même population montraient les traces très nettes d'une influence retardatrice de la première sur la deuxième. Et pourtant nous avions pris quelques précautions pour qu'il n'en fût pas ainsi; en particulier, nous avions transporté, de la chambre noire où nous opérions, la population au plein jour, pendant l'intervalle de temps plus ou moins long séparant les deux expériences. Nous pensions, de cette façon, effacer pratiquement toute trace de la première expérience. Il n'en a pas été ainsi.

Nous avons alors cherché à déterminer dans quelle mesure le phototropisme d'une population à un moment donné est influencé par des expériences tropistiques antérieures, ou si l'on veut, par des souvenirs. Supposons que le déplacement positif du centre de gravité d'une population, pendant une première expérience qui dure t minutes, soit égal à M; que le déplacement positif du centre de gravité de la même population, pendant une deuxième expérience de même durée, soit égal à M'; qu'entre les deux expériences la population soit transportée dans un lieu où les conditions tropistiques sont totalement différentes de ce qu'elles sont pendant les deux expériences, et qu'enfin ces deux expériences soient aussi rigoureusement identiques que possible; le rapport M/M' représentera alors l'influence de la première expérience sur la seconde, c'est-à-dire le souvenir qu'a gardé de la première expérience la population, à travers l'intervalle de temps susceptible de l'effacer.

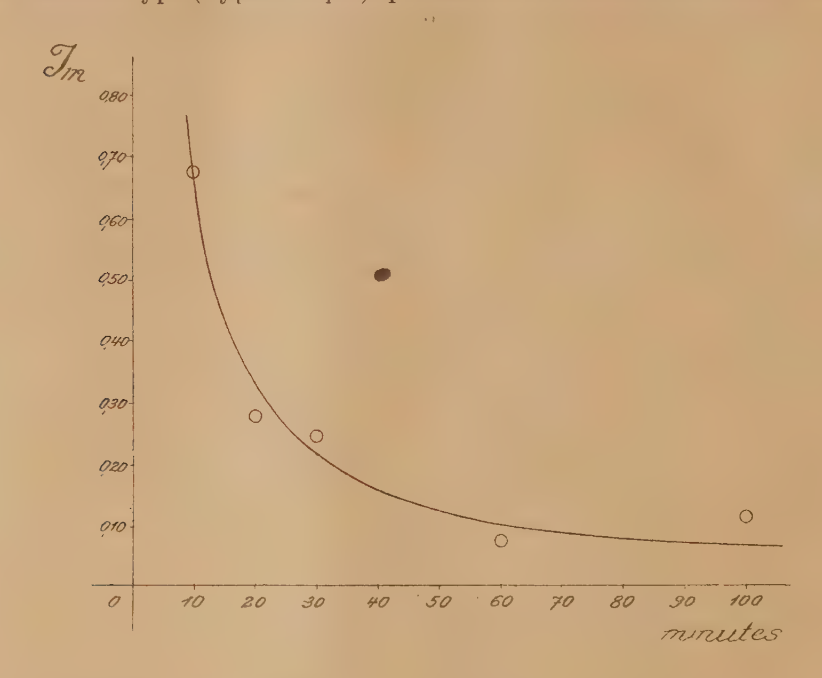
Si le rapport $M/M' = 1$, la conservation du souvenir est égale à 0; autrement dit, l'oubli est total. Nous pouvons alors prendre pour *indice de conservation du souvenir* dans un temps donné la valeur de l'expression

$$\mathcal{J} = \frac{M}{M'} - 1.$$

Nous avons étudié la variation de cet indice en fonction du temps, c'est-à-dire en faisant croître l'intervalle de temps séparant les deux expériences identiques. Nous avons opéré, pour chaque valeur étudiée de l'intervalle, sur 10 populations de 40 Daphnies, soit sur 400 Daphnies. Nous avons pris, comme valeurs définitives $\mathcal{J}_m$ de l'expression $M/M' - 1$, les médianes des

valeurs observées sur chaque groupe de 10 populations (méthode des moindres écarts).

Les résultats obtenus nous ont permis de tracer la courbe ci-dessous. Elle est du même type (hyperbolique) que les courbes de conservation du sou-



venir établies déjà, chez l'Homme par Ebbinghaus, Ch. Henry, H. Piéron, M. Foucault, etc., et chez la Limnée et la Littorine par H. Piéron. Nos résultats viennent donc confirmer l'existence d'une loi tout à fait générale du psychisme animal.

Conclusions. — 1° Le phototropisme peut être mesuré comme une force physique;

2° Le rôle du souvenir dans le phototropisme montre nettement que le tropisme intéresse les centres nerveux. Le tropisme est donc autre chose qu'un simple réflexe; c'est un automatisme très variable, mettant en jeu le système nerveux de l'animal dans son ensemble.

CHIMIE PHYSIQUE BIOLOGIQUE. — *Sur une méthode de détermination de la composition des composés d'addition de la cellulose.* Note [1] de M. G. **Champetier**, présentée par M. G. Urbain.

La méthode d'isolement de Gladstone et la méthode d'analyse indirecte de Vieweg [2] des combinaisons d'addition de la cellulose étant sujettes à diverses critiques, une nouvelle méthode a été décrite dans deux Notes précédentes [3] à propos de l'étude des alcalicelluloses et des hydrates de cellulose. Cette méthode présentant un certain nombre de points communs avec celle qui a été proposée par O. Schwarzkopf [4] quelques mois auparavant et que je regrette de n'avoir pas connue en temps opportun, il est utile de préciser les conditions de son emploi et la nature des indications qu'elle peut fournir.

La méthode qui a été décrite dans les deux Notes précitées [3] s'apparente directement à la *méthode des restes* de Schreinemakers [5]; elle consiste à étudier le système cellulose-eau-corps A (A étant un corps susceptible ou non de se fixer sur la cellulose suivant qu'il s'agit de déterminer la composition d'une combinaison d'addition de la cellulose et du corps A, ou bien d'une combinaison de la cellulose et de l'eau, du type hydrate). Comme dans la méthode des restes, on analyse une série de prélèvements de la combinaison étudiée contenant une quantité décroissante d'eaux mères (solution en excès du corps A); ces prélèvements sont effectués au cours d'un essorage progressif, à la presse, de la combinaison cellulosique imprégnée d'eaux mères.

La variation de la quantité du corps A contenu dans les prélèvements successifs en fonction de la quantité d'eau contenue dans ces prises est représentée par une droite, comme il était logique de s'y attendre puisque

---

(1) Séance du 22 août 1932.

(2) J. H. Gladstone, *Chem. Soc.*, 5, 1852, p. 17; W. Vieweg, *Ber. D. ch. Ges.*, 40, 1907, p. 3876.

(3) G. Champetier, *Comptes rendus*, 192, 1931, p. 1593, et 195, 1932, p. 280.

(4) O. Schwarzkopf, *Cell. Chem.*, 12, 1931, p. 34; *Zeit. Elektrochem.*, 38, 1932, p. 353.

(5) Voir, par exemple, P. Job, *Les méthodes physiques appliquées à la Chimie*, p. 119 (Doin, Paris, 1926), ou bien P. Pascal, *Traité de Chimie minérale*, p. 39 (Masson, Paris, 1931).

la composition de la combinaison, si elle existe, ne doit pas dépendre de la quantité de solution du corps A présente en excès, mais seulement de sa concentration.

La droite ainsi obtenue, relative à une certaine concentration connue de la solution du corps A, passe évidemment par un point qui correspondrait à l'analyse d'un prélèvement duquel toute l'eau mère en excès aurait été éliminée par un essorage théorique suffisamment poussé. Les coordonnées de ce point, qui ne peut pas être atteint expérimentalement et doit être déterminé par extrapolation, fixent la composition de la combinaison si elle existe.

Mais la droite précédente, *à elle seule*, ne permet pas de déterminer ce point, car il est impossible de décider avec certitude, *a priori*, si la combinaison existe, si elle est binaire (cellulose-corps A ou cellulose-eau) ou bien si elle est ternaire (cellulose-corps A-eau).

L'incertitude ne peut être levée qu'en considérant, non pas *une droite isolée*, relative à *une concentration* de la solution initiale du corps A, mais bien l'ensemble des droites se rapportant à diverses concentrations de solutions du corps A. Dans le cas de l'existence d'un composé défini, une série de droites forme un faisceau concourant en un point dont les coordonnées fixent la composition de la combinaison étudiée.

Dans le cas des alcalicelluloses, certaines des droites relatives aux concentrations des solutions de soude comprises entre 0^g et 600^g par litre forment quatre faisceaux sensiblement concourants sur l'axe où sont portées les teneurs en soude des prises d'essai. Ceci permet de définir quatre alcalicelluloses de composition :

$$2C^6H^{10}O^5.NaOH; \quad 3C^6H^{10}O^5.2NaOH; \quad 4C^6H^{10}O^5.3NaOH \quad \text{et} \quad C^6H^{10}O^5.NaOH.$$

Les deux alcalicelluloses intermédiaires, bien que peu marquées sur la courbe qui a été précédemment donnée ([1]), doivent cependant être retenues, tout au moins provisoirement, car une courbe qui ne les mettrait pas en évidence correspondrait à des écarts avec les points en question nettement supérieurs à la moyenne des écarts expérimentaux des autres points, ainsi que cela avait été indiqué et comme il a été encore possible de s'en assurer depuis ([2]).

Dans le cas des systèmes cellulose-eau-hyposulfite de sodium et cellulose-

([1]) G. Champetier, *loc. cit.*

([2]) A ce sujet la courbe qui a été publiée précédemment doit subir quelques légères modifications dues à une extrapolation plus correcte des droites.

eau-pyridine, les droites concourent sensiblement sur l'axe où sont portées les teneurs en eau des prises d'essai; ce qui permet de définir pour la cellulose naturelle, en particulier, un hydrate $2C^6H^{10}O^5.H^2O$.

Enfin, dans le cas des systèmes cellulose-eau-acide formique et cellulose-eau-acide acétique, les droites se coupent, mais non en un point commun, dans le voisinage de l'axe des teneurs en eau, ce qui ne permet pas de déterminer la composition des combinaisons possibles, mais montre néanmoins que la cellulose plongée au sein d'une solution d'acide formique ou d'acide acétique fixe à la fois de l'eau et de l'acide. La quantité d'eau fixée paraît voisine de celle qui correspond à l'hydratation de la cellulose. La quantité d'acide fixée est faible, plus grande cependant dans le cas de l'acide formique que dans celui de l'acide acétique.

Il est à remarquer que la méthode se suffit à elle-même et qu'il n'est pas nécessaire de faire d'hypothèses sur la fixation ou la non-fixation d'un corps sur la cellulose, ni d'adjoindre un quatrième constituant au système pour déterminer la quantité d'eau d'hydratation contenue dans une combinaison ternaire. C'est en cela que notre méthode diffère essentiellement de celle de O. Schwarzkopf (*loc. cit.*), ainsi d'ailleurs que par ses conclusions.

CHIMIE BIOLOGIQUE. — *Sur les hémoglobines musculaires.*
Note de M. **Jean Roche**, présentée par M. A. Desgrez.

De récentes recherches m'ont permis de constater que les hémoglobines musculaires des divers animaux présentent, dans leurs propriétés spectrales, des différences analogues à celles que Vlès, puis Barcroft, Anson, Mirsky et Oinuma ont noté entre les hémoglobines sanguines. Par ailleurs, chez un même animal, les deux pigments possèdent des caractères particuliers dont l'existence a pu être entièrement rapportée aux globines, le groupement prosthétique étant, dans les deux cas, constitué par la même hématine (protohématine) [1].

Aussi la question se pose-t-elle de savoir s'il y a lieu, comme on le fait

---

[1] L'exactitude de cette opinion est démontrée par les faits suivants : En mélangeant une solution alcaline de protohématine réduite à une solution neutre de globine sanguine, on régénère une hémoglobine sanguine, tandis que la même réaction, faite avec une globine préparée à partir de pigment musculaire, donne naissance à une hémoglobine de muscle (J. Roche).

d'ordinaire, de considérer les chromoprotéides sanguin et musculaire comme deux types d'hémoglobine distincts ou de les rassembler dans un même groupe dont les propriétés des divers membres ne présenteraient entre elles que des différences de degré.

L'étude de la fixation de l'oxyde de carbone par ces pigments permet de choisir entre ces deux possibilités, comme il ressort d'expériences dont voici le principe et les résultats.

Dans la réaction $HbO^2 + CO \rightleftharpoons HbCO + O^2$, la valeur de la constante K de formation de HbCO (1) diffère pour les hémoglobines sanguines des divers animaux (Nicloux, Krogh, Barcroft, Anson, Mirsky et Oinuma). En sera-t-il de même pour les hémoglobines musculaires?

Par ailleurs, le spectre d'absorption des premières a des caractéristiques propres à chaque animal. Le plus important est la valeur de l'intervalle D séparant les axes des bandes α des dérivés oxygénés et oxycarbonés. Dans toute la série des hémoglobines sanguines étudiées par Barcroft, Anson, Mirsky et Oinuma (2), les valeurs de D, mesurées en unités angström et celles de K varient dans le même sens, et cela avec une proportionnalité telle que la relation

$$\operatorname{Log} K = 0{,}05 \times D$$

ne souffre pas d'exception. Si cette équation s'applique aussi aux hémoglobines musculaires, il y aura tout lieu de faire entrer celles-ci dans le cadre des précédentes.

J'ai déterminé, sur des solutions de pigment musculaire de divers animaux, d'une part, la valeur de D à l'aide du spectroscope d'Hartridge, et, d'autre part, celle de K par la méthode spectrométrique de Barcroft, Anson, Misky et Oinuma (2) mettant en œuvre le même appareil. Connaissant le titre en CO et O^2 des mélanges gazeux auxquels ont été exposées les solutions, la position de la bande α du spectre, on calcule les quantités de gaz dissoutes, le taux de HbCO et de HbO^2, et à l'aide de ces données, la valeur de K (3).

Les moyennes des résultats sont les suivantes :

---

(1) Cette constante K est égale à $[HbCO].[O^2] : [HbO^2].[CO]$.

(2) J. Barcroft, M. L. Anson, A. E. Mirsky et S. Oinuma, *Proc. Roy. Soc.*, B, 97, 1924, p. 61-83, 8 fig.

(3) Les expériences ont été faites à 15°.

Hémoglobine musculaire de :	Axe de la bande (angström).			
	HbO^2.	HbO^2.	D.	K.
Bœuf	5803	5772	31	46,5
Cheval	5804	5770	34	51,3
Chien	5803	5768	35	52,3

Les constantes K figurant dans la dernière colonne de ce tableau sont différentes suivant l'espèce animale considérée. Elles sont notablement inférieures à celles caractéristiques des divers pigments sanguins, lesquels ont donc, pour l'oxyde de carbone, une affinité beaucoup plus grande que les hémoglobines musculaires.

Néanmoins l'équation : $\log K = 0{,}05 \times D$, s'applique aussi bien aux unes qu'aux autres. L'écart entre les valeurs de logK, calculées à partir de D, et celles déterminuées expérimentalement, est, en effet, pour les cas étudiés, du même ordre de grandeur que les erreurs dues à l'imprécision des mesures spectrales, comme le montre le tableau suivant :

Hémoglobine musculaire de :	Log K	
	calculé.	trouvé.
Bœuf	1,55	1,66
Cheval	1,70	1,70
Chien	1,75	1,71

Les hémoglobines musculaires et sanguines sont donc les représentants d'un même type de pigment dont les propriétés spectrales, individuelles ou spécifiques, sont déterminées par les mêmes lois.

La séance est levée à $15^h 15^m$.

A. Lx.

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE

Ouvrages reçus pendant les séances de juillet 1932 (*suite et fin*).

Altitude et précocité du développement des germes chez la Pomme de terre, par J. Costantin, P. Lebard et J. Magrou. In *Bulletin du Muséum*, 2e série, Tome IV, nº 3, 1932; 1 fasc. 24cm.

Biometric Studies on U. S. Army officers, par Lowell, J. Reed et Albert G. Love. Washington, Medical Section American Life Convention, mai 1931; 1 fasc. 22cm,4.

Estudio sismologico de Chile, par Julio Bustos Navarrett. Santiago, Prensas de la Universitad de Chile, 1931; 1 fasc. 25cm,6.

Observations nouvelles ou peu connues d'éclairs globulaires, par E. Mathias. In *Bulletin de la Société Française des Électriciens* (juillet 1932). Bar-le-Duc, Comte-Jacquet et Cie, 1 fasc. 26cm,8.

L'éclair fulgurant ascendant. L'éclair en chapelet, par E. Mathias. In *Bulletin de l'Institut et Observatoire de Physique du Globe du Puy-de-Dôme*, nº 6. Paris, Presses universitaires de France, 1932; 1 fasc. 25cm,1.

L'éclair, par E. Mathias. In *Congrès International d'Électricité*. Paris, 1932, 11e section, Rapport nº 6; 1 fasc. 24cm.

Archives du Muséum national d'histoire naturelle. Centenaire de G. Cuvier, VIe série, Tome IX. Paris, Masson et Cie, 1932; 1 vol. 32cm,7.

New General Catalogue of Double Stars, within 120° of the North Pole, par Robert Grant Aitken. Washington, Carnegie Institution, 1932; 2 vol. 29cm,4.